



TITLE:

# 三次元の孤立商特異点の解消について (特異点の位相幾何学)

AUTHOR(S):

藤木, 明

---

CITATION:

藤木, 明. 三次元の孤立商特異点の解消について (特異点の位相幾何学). 数理解析研究所講究録 1973, 170: 128-137

ISSUE DATE:

1973-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107006>

RIGHT:

三次元の孤立商特異点の解消について.

京大 数研 藤木 明

複素多様体  $X$  に有限群  $G$  が作用する時, 商空間  $X/G$  が正規解析空間の構造を持つことが知られる.  $\dim X=3$  の場合には,  $X/G$  の特異点の解消を,  $G$  の作用と利用して構成しうる. この note では, これを述べる.

基本的には, 次の場合である.  $G$  を位数  $n$  の巡回群とし, その generator  $g$  が, 複素 3 次元空間  $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3(z_1, z_2, z_3)$  に,

$$(1) \quad g: (z_1, z_2, z_3) \longmapsto (e_n z_1, e_n^p z_2, e_n^q z_3) \quad (n, p) = (n, q) = 1$$

$0 < p, q < n$ ,  $\tau$  が作用するとする. ここで,  $e_n^p = \exp \frac{2\pi i p}{n}$ .

$N_{n,p,q} = \mathbb{C}^3/G$  とおくと, これは原点に対応する点  $P$  で孤立特異点を持つ.

### 定 理 1

$N_{n,p,q}$  の解消,  $f: \tilde{X} \longrightarrow N_{n,p,q}$  で次の性質を持つものが存在する.

1)  $\tilde{X}$  の有限開被覆  $\{U_i\}_{i=1,2}$  で次の性質を満たすものが存在する.

$$1) \quad U_i \cong \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3(u_i, v_i, w_i)$$

2)  $f^{-1}(P) = \Theta$  とおくと,  $\Theta \cap U_i$  の既約成分は, (1) の同型の意味で,  $U_i$  の座標平面, 正しくは  $U_i = 0$  に一致する。

1)  $\mathbb{C}^3(Z_1, Z_2, Z_3)$  に,  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$   $i=1, 2, 3$ , で作用する<sup>\*)</sup> 自己同型  $A_0$  は,  $N_{n, P}$  の自己同型  $A$  を誘導するが, これが  $\tilde{X}$  の自己同型  $\tilde{A}$  に拡張し, (i.e.  $\tilde{X}$  の自己同型  $\tilde{A}$  が存在して  $f^* \tilde{A} f = A f(x)$ ,  $\forall x \in \tilde{X}$  が成立する) 各  $U_i$  で, (1) の同型の意味で,  $(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)})$ ,  $\alpha_\mu^{(i)} \in \mathbb{C}^*$   $i=1, 2, \mu=1, 2, 3$ , で作用する。

2) (本質的に上の 1) 2) により)  $\Theta = \bigcup_{i=1}^t \Theta_i$  を既約成分への分解とする時, ①  $\Theta_i$  は非特異有理曲面 for  $i=1, \dots, t$  ②  $\Theta_i \cap \Theta_j \neq \emptyset$  (for  $i \neq j$ )  $\Theta_i \cap \Theta_j \cong \mathbb{P}^1$  かつ, 交わりは transversal. ③  $\Theta_i \cap \Theta_j \cap \Theta_k \neq \emptyset$ , for  $i \neq j \neq k \neq i$ , なら, それらは一点で transversal に交わる. ④ 異なる 4 つの  $\Theta_i$  は, 交わらない. ⑤  $\Theta_i \neq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ,  $\neq \Sigma_2$  (正しくは  $\Sigma_n$  は degree  $n$  の Hirzebruch 曲面) ⑥  $\pi_1(\Theta) = \{e\}$  (基本群)

\*) 一般に  $\mathbb{C}^3$  への action が  $(Z_1, Z_2, Z_3) \mapsto (\alpha_1 Z_1, \alpha_2 Z_2, \alpha_3 Z_3)$   $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$  で表される時, これを  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  と表す。

これを群  $G$  の位数に関する帰納法で証明するためには situation を今少し一般にする必要があるが, ここではそれは述べるに, その際に上の situation を群  $G$  の位数が  $p$  と  $q$  の場合に帰着する方法を述べる。すなわち, 複素空間  $X_1$  と正則写像  $\chi: X_1 \rightarrow X_2$  で次の性質を持つものを構成する。:  $X_2$  の 3 枚の開被覆  $\{U_0, U_1, U_2\}$  が存在し,  $U_0 \cong \mathbb{C}^3$ ,  $U_1 \cong \tilde{U}_1/H_1$ ,  $U_2 \cong \tilde{U}_2/H_2$  となる。こ

で,  $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$  は複素多相体,  $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$  は各々位数  $p, q$  の巡回群である。

さらにこの時  $X_2$  の singular locus  $T$  は  $T_1$  と  $T_2$  の disjoint union となる。

ただし  $T_1$  (resp  $T_2$ ) は  $U_1$  (resp  $U_2$ ) の singular locus である。<sup>\*</sup>

(証明) 3次元  $t$ -空間  $\mathbb{C}^3(t)$  から  $\mathbb{C}^3(z)$  への被覆写像  $\varphi$  を

$$(2) \quad \varphi: (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (z_1, z_2, z_3) = (t_1, t_2^p, t_3^q)$$

で定義すれば, この被覆変換群  $H$  は  $H \cong H_1 \oplus H_2$   $H_1 = \{h_1\}, H_2 = \{h_2\}$

$$(3) \quad \begin{cases} h_1: (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (t_1, e_p t_2, t_3) \\ h_2: (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (t_1, t_2, e_q t_3) \end{cases}$$

と表される。よって  $N_{H, \mathbb{C}^3} \cong \mathbb{C}^3(t)/G \cdot H$ 。

ただし  $G$  は  $\mathbb{C}^3(t)$  への action は  $(e_n, e_n, e_n)$  で定義する。  $G$  の

action は  $\varphi$  と equivariant, i.e.  $g \cdot \varphi = \varphi \cdot g$ 。  $\sigma: \pi_0 \rightarrow \mathbb{C}^3(\frac{t}{z})$  を原点を

a monoidal 変換とすると, もろろ  $\pi_0$  は  $\mathbb{P}^2$  上の line bundle  $\pi^*$ , hyperplane

bundle の inverse と同型。  $\pi_0$  への  $G$  の action, ( $G, H_1, H_2$  の action は

自然に  $\pi_0$  へそれだけ拡張される。) の下方から  $\pi_0/G$  は  $\mathbb{P}^2$  上の

degree  $(-n)$  の line bundle と同型。これを  $\pi$  とする。  $\pi: \pi_0 \rightarrow \mathbb{P}^2$  を射影

とし,  $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{P}^2$  の同次座標と見え,  $t_i \neq 0$  と定められる open set を

$V_i$  とする。  $V_i = \pi^{-1}(U_i)$   $i=1, 2, 3$ , とおけば,  $\pi_0 = \bigcup_{i=1}^3 V_i$   $V_i \cong \mathbb{C}^3$  が成り

立つ。  $V_i$  の自然な座標に関して,  $H_1, H_2$  の作用は次の形をとる。

$$(4) \quad \begin{cases} & V_1 & V_2 & V_3 \\ h_1 & (1, e_p, 1) & (e_p^n, e_p^{-1}, e_p^{-1}) & (1, 1, e_p) \\ h_2 & (1, 1, e_q) & (1, 1, e_q) & (e_q^n, e_q^{-1}, e_q^{-1}) \end{cases}$$

<sup>\*</sup>)  $\dagger$  は proper modification になるようにとる。

ここでも  $p=8$  なら、容易にわかるように  $V_2/H, V_1/H$  の解消は、2次元の場合のそれに帰着され、 $V_1/H$  は非特異だから、これにより、 $W/H$  の非特異化  $f_{20}: \widehat{W}_H \rightarrow W/H$  が得られ、 $W/H$  から  $N_{W,p8}$  への自然な写像とこれとを合成すれば、 $N_{W,p8}$  の resolution が得られる。

これは [2] で構成されたものと一致する。さて  $p=8$  の場合の結果を利用して、 $V_2/H$  の resolution を explicit に構成し、これを今  $Y_2: Z_2 \rightarrow V_2/H$  と表わす。  $Z_2$  は、 $2s+1$  個, for some  $s \geq 0$  の間被覆  $\{U_0, W_k^{(2)}, W_k^{(3)}, k=1, \dots, s\}$  で覆われ、(cf [2])  $Z_2$  に拡張された  $H_2$  の作用は各  $W_k^{(i)}, U_0$  で次の形をとることが確かめられる。

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (1, 1, e_8) & \text{on } W_k^{(2)} \\ (e_7^{-\mu_k}, e_8^{\mu_{k+1}}, e_8^{-1}) & \text{on } W_k^{(3)} \\ (1, 1, e_8) & \text{on } U_0 \end{array} \right. \quad \text{for some } \mu_k, \mu_{k+1} \in \mathbb{Z}$$

この式から、 $Z_2/H_2$  の singular locus は、compact。さらに、 $V_3$  から同様に構成した  $Z_3$  に対し、 $V_1/H \cup Z_2/H_2 \cup Z_3/H_1$  が、1つの複素空間を定義することがわかる。これを  $X_1$  とおき、 $U_0 = V_1/H, U_1 = Z_2/H_2, U_2 = Z_3/H_1, \tilde{U}_1 = Z_2, \tilde{U}_2 = Z_3, \tilde{H}_1 = H_1, \tilde{H}_2 = H_2$  とおけばよい。この時 singular locus に因する statement は満たされている。morphism  $f_2$  は自然に構成される。 p.e.d.

上の証明の detail は、 $\nu$  に、induction の完全な遂行は、座標の explicit な計算によってなされる。同様の方法で、 $X$  の次元に関する帰納法を加えることにより、 $\dim X > 3$  の場合にも定理 1 に

対応する事実を証明できることがほぼ確実である。

次に定理 1 を  $\mathbb{C}^*$ -action を持つ特異点の解消に應用する。  $L$  を、非特異曲面  $S$  上の line bundle とし、  $\sigma: \mathbb{C}^* \times L \rightarrow L$  を  $L$  の自然な  $\mathbb{C}^*$ -action とする。  $G$  を  $\text{Aut}_0 L$  の有限部分群で、  $\sigma$  と可換なものとする。(ここで  $\text{Aut} L$  は  $L$  の自己同型群を表す。) 今  $X = L/G$  が 0-section の image の外では、特異点を持たないとする。

### Theorem 2

$X$  の解消  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  で 次の性質を満たすものが存在する。

1)  $\tilde{X}$  の  $\mathbb{C}^*$ -action が存在し、(denoted by  $\tilde{\sigma}$ )  $f \cdot \tilde{\sigma}(x) = \sigma(f(x))$  for  $\forall x \in \tilde{X}$  が成立する。ここで  $\tilde{\sigma}$  は  $L$  の  $\mathbb{C}^*$ -action  $\sigma$  により誘導された  $X$  の  $\mathbb{C}^*$ -action。

2)  $T$  は  $X$  の singular locus とし、  $f(T) = \Theta = \bigcup_{\alpha=1}^t \Theta_\alpha$ 。  $\Theta_\alpha$  irreducible, とおくと、  
 ①  $\Theta_\alpha$  は、非特異線織面  
 ②  $\Theta_\alpha \cap \Theta_\beta \neq \emptyset$  for  $\alpha \neq \beta$  なら、  $\Theta_\alpha \cap \Theta_\beta$  は非特異曲面で、  $\Theta_\alpha$  と  $\Theta_\beta$  の交わりは transverse。  
 ③  $\Theta_\alpha \cap \Theta_\beta \cap \Theta_\gamma \neq \emptyset$  for  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$  なら、それは有限個の点で transverse に交わる。  
 ④ どの  $\Theta_\alpha$  も 1 点を共有しない。

略証)  $T$  に属する点  $x$  に対し、任意に  $s \in \pi^{-1}(x)$  をとる。ここで  $\pi$  は自然な商写像  $L \rightarrow X$ 。  $L$  の 0-section を同じく  $S$  で表すと、仮定より  $s \in S$ 。  $G_s$  は  $s$  の stability group とすると、  $\forall g \in G_s$  は、  $S$  上の  $L$  の fibre の近傍で、  $L$  の ~~群~~ <sup>面</sup> trivialization に対応し、(これを  $\varphi|_L \rightarrow \mathbb{C} \times U$ ,  $U \ni s$  で表す。) 次、形  $G$  が作用する。 i.e.  $S \in \varphi^{-1}(x)$  に対応する

3 fibre coordinate とする時,  $g: \zeta \mapsto \alpha(g)\zeta$ ,  $\alpha(g) \in \mathbb{C}^*$ . 従って,  $G \rightarrow \mathbb{C}^*$  は準同型を  $g \mapsto \alpha(g)$  で定義すれば,  $G$  は cyclic group の small group による extension であることがわかる. 従って,  $\pi$  の <sup>近傍</sup> 近傍は,  $D^3/G(x)$  と同型である. ここで  $D^3$  は 3次元の polycylinder,  $|z_i| < 1, i=1,2,3$ .  $G(x)$  はこれに作用する有限巡回群.  $D^3/G(x)$  の特異点の解消は, 群  $G(x)$  の位数に関する帰納法により, 定理 1 に着帰される. 各点  $x$  の近傍に対して構成した resolution が 1 つの複素多様体  $\tilde{X}$  を得ることをみるために次の lemma が必要である.

### Lemma

$X$  を 3次元の  $V$ -manifold,  $\{U_\alpha, G_\alpha\}$  が対応する  $X$  の被覆とする.  $G_\alpha$  を有限群とし,  $\tilde{U}_\alpha \subset \text{polycylinder}$  とし, Theorem 1 の 1.1.2. 次の系で構成される resolution  $\tilde{Q}_\alpha: (\tilde{U}_\alpha/G_\alpha) \rightarrow U_\alpha/G_\alpha$  とすると,  $\tilde{U}_\alpha/G_\alpha \cap \tilde{U}_\beta/G_\beta \neq \emptyset$  in  $\tilde{X}$  となる. (通部分で, 一致する). (by abuse of language everywhere) 略証)  $G_\alpha$  は small group を含んだ 11 とし,  $\alpha$  と  $\beta$  の  $U_\alpha$  の原点は  $U_\beta$ ,  $\beta \neq \alpha$  に含まれた 11 とし,  $\alpha$  と  $\beta$  の  $U_\alpha$  の原点は  $U_\beta$ ,  $\beta \neq \alpha$  に含まれた 11 とし,  $\alpha$  と  $\beta$  の  $U_\alpha$  の原点は  $U_\beta$ ,  $\beta \neq \alpha$  に含まれた 11 とし,  $\alpha$  と  $\beta$  の  $U_\alpha$  の原点は  $U_\beta$ ,  $\beta \neq \alpha$  に含まれた 11 とし. 従って  $\tilde{U}_\alpha/G_\alpha \cap \tilde{U}_\beta/G_\beta$  の singular locus は,  $D^3/G \times D$ , ( $D^3$  2次元の polycylinder,  $D$  unit disc の内部) と local に同型.  $\tilde{Q}_\alpha$  は  $D^3/G$  の minimal resolution  $\times \text{id}_D$  であり. 一方これは,  $D^3/G \times 0, (0 \in D)$ , を support とする. 適当に ideal の sheaf の blowing up である. blowing up は  $\tilde{Q}_\alpha$  のとり方に無関係だから  $\tilde{Q}_\alpha$  と  $\tilde{Q}_\beta$  は一致する.

p.e.d. q.e.d.

Remark  $n$ -次元の場合 (たとえば 3次元) の Theorem 1 の resolution は.

非特異中心の有限回の monoidal 変換に分解できることが言える  
 は、同じ lemma は高次元でもその analogy を持つ。しかしこれは正し  
 か L 110 //  $\pi(L)$  を negative とすれば、 $\pi(S)$  exceptional。

Corollary 3  $Y \subset X$  において  $\pi(S)$  を contract して得られる anal. space  
 とする時、これは isolated singularity with  $\mathbb{C}^*$ -action であり、この resolution  
 で定理 2 の 1) と 2) ③ ④ を満たすものが存在する。条件  
 ①は、1) の  $\mathbb{Q}$ , say  $\mathbb{Q}_1$  を除いて非特異線維面、~~と~~ という条件が  
 おきかえられる。

Corollary 4 3次元の polycylinder  $D^3$  に有限群  $G$  が作用し、 $D^3/G$  が原  
 点に対応する点で isolated singularity を持つ時、この resolution

$f: X \rightarrow X$  で定理 1 の 1) 2) と 4) を満たすものが存在する。

略証)  $G \subset GL(3, \mathbb{C})$  と考えよう。  $P: W \rightarrow D^3$  は原点での monoidal  
 変換とする。  $G$  の action は  $W$  の action に extend する。  $W$  は  $\mathbb{P}^2$  の  
 line bundle の  $\mathcal{O}$ -section の (6 倍と同一視される) 故に Corollary 3 の証明  
 方法が適用しうる。この際  $\pi(S) \cong \mathbb{P}^2/G$  でこれは rational。

$f[\pi(S)]$  が nonsingular になる事等は、定理 1 の除の計算による。

Remark. ほとんどの場合、他の有限群  $H$  が  $D^3$  に act している時、こ  
 れが  $X$  の action を induce する。  $H$ -equivariant resolution が  
 存在する。

例) 系 3 の例として、Brieskorn variety の resolution が可能であ  
 る。実際、 $z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + z_3^{a_3} = 0$  かつ、 $\sum a_i = 1$  と仮定すれば



explicitに resolution を construct する 方法がある。(c.f. [7])  $T$  と  $\pi$  は、この  $K$  が topological sphere の  $\pi$  resolution の結果  $\pi^{-1}$  の surfaces である rational  $\pi$ -PB のことである。この場合は  $\pi$  の記号  $\pi(S) = \mathbb{P}^2$  とする。

最後に簡単な Brieskorn variety の resolution の例をあげておく。これは上の定理と関係がある。

例1  $Z_0^{a_0} + Z_1^{a_1} + Z_2^{a_2} + Z_3^{a_3} = 0$  の resolution,  $f: \tilde{V}_a \rightarrow V_a$   $\pi$ -束の性質を扱うことが存在。  $f^{-1}(p) = \Theta_0 \cup \dots \cup \Theta_r$  と既約成分に分けるとき (i)  $\Theta_i$  は  $\mathbb{P}^2$  の  $l$  枚の branched covering  $\pi$  の branch locus  $C$  は  $\mathbb{P}^2$  内  $\pi^{-1}(C)$  (  $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{P}^2$  の同次座標と  $\pi$  )  $Z_1^q + Z_2^q + Z_3^q = 0$  で定義される非特異曲線。  $\Theta_i \cong \mathbb{P}^1$ -bundle over  $C$   $i=1, \dots, r$ 。  $\Theta_i \cap \Theta_{i+1} \cong C$   $i=0, \dots, r-1$ 。

(ii)  $\Theta_i \cap \Theta_0 = \bar{C}$  とおくと、  $N_{\Theta_i/\tilde{V}_a} \cong -\frac{a'p+1}{a'a_0'}[C]$  ,  $N_{\Theta_i/\tilde{V}_a}|_{F_i} \cong -b_i H_{F_i}$   $(i=1, \dots, r)$  が成り立つ。ここで  $l = (a_0, a)$   $a_0 = a_0' l$   $a = a' l$ 。  $p'$  は  $-(a'p+1) \equiv 0 \pmod{a_0'}$   $0 < p' < a_0'$  により決まる数。  $b_i$  は  $\pi = a_0'$  と  $p$  から Hirzebruch [7] の algorithm により決まる数。ただし  $p$  は  $p \equiv -a' \pmod{a_0'}$   $0 < p < a_0'$  により決まる数。  $F_i$  は  $\mathbb{P}^1$ -bundle  $\Theta_i$  の任意の fibre。  $N$  は normal bundle。

(a)  $l=1$  のとき  $\Theta \cong \mathbb{P}^2$  (ii) から  $N_{\Theta/\tilde{V}_a} \cong -\frac{a'p+1}{a_0} H_{\Theta}$ 。ただし  $H_{\Theta}$  は  $\Theta$  の hyperplane bundle。よって  $\Theta$  が  $\pi$ -種例外曲面  $\leftrightarrow a'p+1 = a_0$   $\leftrightarrow a|a_0-1$

(b)  $l=1$  のとき  $b_i = 2$   $\leftrightarrow a-1|a_0$ 。従って  $\Theta$  が  $\pi$ -種例外曲面かつ  $b_i = 2$   $\leftrightarrow a_0 = (sa-1)(a-1)$ 。  $s=1, 2, 3, \dots$ 。

(c)  $a=2$  の時, 1)  $d$  が奇数の時  $a)$  より  $\Theta_0 \cong \mathbb{P}^2$  が一種例外曲面。  
 $\Theta_0 \cong \Sigma_2$  ( $i=1, \dots, 5$ ) と  $b_1=2$ 。2)  $d$  が偶数の時,  $\Theta_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ,  $\Theta_0 \cong \Sigma_2$  ( $i=1, \dots, 5$ )  
 と  $b_1=2$ 。  $N_{\Theta_0/\tilde{V}_a} = -[\bar{C}]$ ,  $\bar{C}$  は  $\Theta_0$  の diagonal である。  $\Theta_0$  は一種例外曲  
 面。  $b_1=2$  より  $\Theta_0$  を contract すれば次に  $\Theta_1$  が一種例外曲面になる。  
 以下順々  $\Theta_i$  を contract すると最後に  $\mathbb{P}^1$  が残る。 (ii) の場合  
 を除き  $\Theta_0$  が ruled surface, ( $\mathbb{P}^1$ -bundle) になるのはこの場合しかないので、  
 ようして  $\Theta_0$  が curve に contract できるのはこの場合しかないので。

(d)  $a \neq 0$  の時,  $n=1$  の時,  $f(0) = \Theta_0$ ,  $N_{\Theta_0/\tilde{V}_a} = -[\bar{C}]$ , 実際  $\tilde{V}_a \cong (-[\bar{C}_0])$  の  
 line bundle の bundle space)

例の証明)  $\mathbb{C}^4$  内の line  $L: Z_1=Z_2=Z_3=0$  は  $V_a$  と原点のみを共有  
 する。  $\sigma: W \rightarrow \mathbb{C}^4$  を  $L$  に沿っての monoidal 変換,  $\bar{V}_a \subset \sigma^{-1}(L)$  は  $V_a$  の pro  
 per transform とする。  $\sigma^{-1}(0) \cap \bar{V}_a \cong \mathbb{P}^2$  で,  $\sigma|_{\bar{V}_a - \sigma^{-1}(0)}$  は isomorphism である。  
 $\bar{V}_a$  の  $\mathbb{P}^2$  上の singularity をはさすことはよい。 monoidal 変換の定義から  
 $\bar{V}_a$  の方程式は local に  $Z_0^a = \zeta Z_1^a$ , ( $\zeta \in \mathbb{C}^*$ ) は  $\bar{V}_a \cap (\sigma^{-1}(Z_0^a + Z_1^a + Z_2^a + Z_3^a = 0))$   
 (local equation) と書ける。 これから  $\Theta_i$ ,  $i=0, \dots, 5$  に関する statement が  
 得る。 ii) の normal bundle に関して  $f$  と  $\tilde{V}_a$  は、函数  $Z_0$  が  $\tilde{V}_a$  上に  
 induce する divisor が linearly equivalent to 0 を利用して証明できる。

例 2  $Z_0^a + Z_1^a = Z_2^b + Z_3^b$   $V_{a,b}$  の resolution  $f: \tilde{V}_{a,b} \rightarrow V_{a,b}$  が  
 次のように構成される。 1)  $Z_0=Z_1=0$  による  $\mathbb{C}^4$  の monoidal 変換,  
 followed by,  $Z_2=Z_3=0$  の proper transform の center とする monoidal 変換。 これを  
 $\sigma: W_1 \rightarrow V_{a,b}$  とすると,  $\sigma^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 。 2)  $Z_0^a + Z_1^a = 0, Z_2^b + Z_3^b = 0$  による

